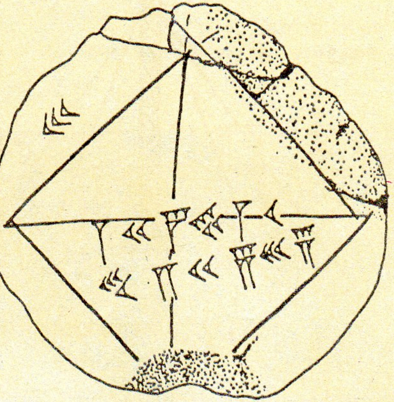
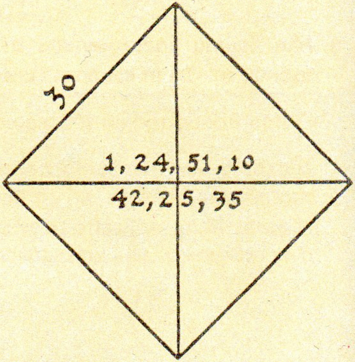
ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Υπολογισμούς τετραγωνικών ριζών συναντάμε σε σωζόμενες Βαβυλωνιακές πινακίδες (2000 π.Χ.). Για παράδειγμα σε πινακίδα της συλλογής του Πανεπιστημίου του Yale γράφεται ότι η $\sqrt{2}$ είναι ίση με 1,414222. Η τιμή αυτή διαφέρει από την πραγματική λιγότερο από 0,00001.

Η πιο σπουδαία όμως ανακάλυψη για τις τετραγωνικές ρίζες οφείλεται στους αρχαίους Πυθαγόρειους, οι οποίοι απέδειξαν ότι ορισμένες τετραγωνικές ρίζες, όπως π.χ. η $\sqrt{2}$, είναι άρρητοι αριθμοί. Η απόδειξη αυτή αποδίδεται στον Ίππασο τον Μεταποντίνο (περί το 400 π.Χ.), ο οποίος απέδειξε ότι η διαγώνιος του τετραγώνου, όταν μετρηθεί με μονάδα μέτρησης την πλευρά του, δίνει άρρητο αποτέλεσμα. Η απόδειξη του Ίππασου δε σώζεται, υπάρχει όμως μια πολύ κομψή απόδειξη στα Αναλυτικά πρότερα του Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.). Από το παρακάτω απόσπασμα του διαλόγου «Θεαίτητος» του Πλάτωνα φαίνεται πόσο πολύ το θέμα των άρρητων αριθμών απασχόλησε τους φι-





λοσόφους. Στο απόσπασμα αυτό ο συνομιλητής του Σωκράτη, ο Πυθαγόρειος Θεαίτητος, αναφέρεται σε έναν άλλο Πυθαγόρειο, το Θεόδωρο, και λέει:

«Αυτός εδώ ο Θεόδωρος μας δίδασκε για τις τετραγωνικές ρίζες, και για την τετραγωνική ρίζα του 3 και του 5, και αποδείκνυε ότι αυτές δεν είναι σύμμετρες προς την υπόρριζη ποσότητα. Έτσι εξετάζοντας μια μια έφθασε μέχρι το 17».

Τέλος, στο 10ο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, έργο που επηρέασε τη μαθηματική παιδεία όσο κανένα άλλο, γίνεται συστηματική μελέτη των ριζών αριθμών ως προς το άρρητο αυτών.

Ο ακριβής ή κατά προσέγγιση υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού μπορεί να γίνει με τον παρακάτω αλγόριθμο.

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε $\sqrt{53361}$.

```
5'33'61 |
        |______
        |
        |
```

Βήμα 1ο:
Γράφουμε τον αριθμό στη διπλανή διάταξη χωρίζοντάς τον ανά δύο ψηφία από το τέλος.

```
 5'33 61 | 2
-4       |______
 1       |
```

Βήμα 2ο:
Βρίσκουμε το μεγαλύτερο φυσικό που το τετράγωνό του δεν υπερβαίνει το πρώτο τμήμα, και τον γράφουμε δεξιά και πάνω από την οριζόντια γραμμή. Στο παράδειγμά μας γράψαμε 2, γιατί $2^2 = 4 < 5$ (ενώ $3^2 = 9 > 5$). Το τετράγωνο του αριθμού αυτού, δηλαδή το 4, το αφαιρούμε από το πρώτο τμήμα, δηλαδή από το 5.

```
 5'33'61 | 2
-4       |______
 1 3,3   | 43
 1 2 9   | x 3
 -----   | ---
  = 4    | 129
```

Βήμα 3ο:
Δεξιά της διαφοράς 1 κατεβάζουμε το επόμενο διψήφιο τμήμα 33 χωρίζοντας το τελευταίο ψηφίο του αριθμού που σχηματίζεται (13,3). Κάτω από την οριζόντια γραμμή γράφουμε το 4, δηλαδή το διπλάσιο του αριθμού που είναι πάνω από την οριζόντια γραμμή. Δεξιά του 4 και κάτω από αυτό γράφουμε το ακέραιο μέρος του πηλίκου 13:4, δηλαδή το 3, και πολλαπλασιάζουμε. Αν το γινόμενο είναι μικρότερο του 133 (όπως εδώ), τότε γράφουμε το 3 δεξιά του 2 και αφαιρούμε το γινόμενο από το 133. Αν το γινόμενο είναι μεγαλύτερο του 133 μειώνουμε κατά μονάδα το ακέραιο μέρος του πηλίκου.

```
 5'33'61 | 231
-4       |__________
 1 3,3   | 43  | 461
 1 2 9   | x3  |   1
 -----   | --- | ---
 = 4 6 1 | 129 | 461
   4 6 1 |
   -----  |
       0 |
```

Βήμα 4ο:
Επαναλαμβάνουμε το 3ο βήμα, μέχρι να εξαντληθούν όλα τα διψήφια τμήματα.
Αν, όπως εδώ, βρούμε τελικά υπόλοιπο μηδέν, θα είναι

$$\sqrt{53361} = 231$$

Πράγματι, διότι $231^2 = 231 \cdot 231 = 53361$

Αν το υπόλοιπο δεν είναι μηδέν, τότε ο αριθμός που σχηματίζεται πάνω από την οριζόντια γραμμή είναι η τετραγωνική ρίζα με προσέγγιση μονάδας.

Στα δύο επόμενα παραδείγματα βρίσκουμε με τον προηγούμενο αλγόριθμο τετραγωνική ρίζα με προσέγγιση δεκάτου καθώς και τετραγωνική ρίζα δεκαδικού αριθμού.

Τετραγωνική ρίζα του 1347

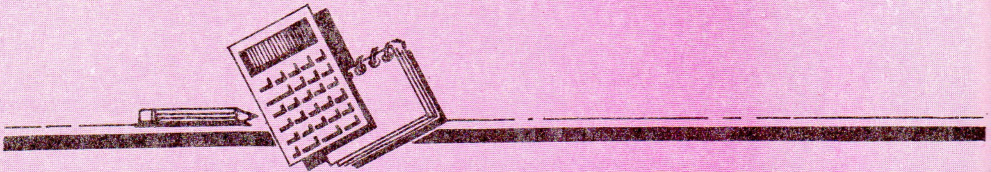
13'47	36,7		
− 9	67	66	727
447	× 7	× 6	7
− 396	469	396	5089
= 510.0			
− 5089			
= 11			

$\sqrt{1347} \simeq 36,7$

Τετραγωνική ρίζα του 640,09

6'40'09	253		
− 4	46	45	503
240	6	5	3
− 225	276	225	1509
= 150.9			
− 1509			
= 0			

$\sqrt{640,09} = \sqrt{\frac{640\,09}{100}} = \frac{253}{10} = 25,3$



΄Οπως βλέπουμε ο υπολογισμός των τετραγωνικών ριζών έχει έναν αρκετά πολύπλοκο αλγόριθμο. Για το λόγο αυτό υπάρχει στο τέλος του βιβλίου έτοιμος πίνακας τετραγωνικών ριζών. ΄Ομως και σ΄ αυτή την περίπτωση υπάρχουν δυσκολίες, γιατί ο πίνακας αυτός περιέχει τις τετραγωνικές ρίζες μόνο των φυσικών από το 0 ως το 499. Η εύρεση της τετραγωνικής ρίζας ενός οποιουδήποτε θετικού αριθμού γίνεται στην εποχή μας πολύ απλά με ένα υπολογιστή τσέπης (κομπιουτεράκι) ως εξής:

Παράδειγμα

α) Να υπολογιστεί η $\sqrt{2}$

β) Να υπολογιστεί η $\sqrt{457}$

Λύση

α) Πατάμε διαδοχικά τα πλήκτρα: $\boxed{2}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ οπότε στην οθόνη βλέπουμε τον αριθμό $\boxed{1.4142136}$

β) Πατάμε διαδοχικά τα πλήκτρα: $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ οπότε στην οθόνη βλέπουμε τον αριθμό $\boxed{21.377558}$