

Κεφάλαιο 5 Ανάλυση Αλγορίθμων

5.1 Επίδοση Αλγορίθμων / Εισαγωγή

- Χρόνος εκτέλεσης Αλγορίθμου;
- Σύγκριση Αλγορίθμων;
- «Βέλτιστος» Αλγόριθμος;

Χειρότερη Περίπτωση Αλγορίθμου

& Αποτύπωση μεγέθους προβλήματος με βάση πλήθος δεδομένων

5.1.1 Χειρότερη Περίπτωση Αλγορίθμου

Μέγιστο Κόστος εκτέλεσης Αλγορίθμου (σε Υπολογιστικούς Πόρους)

- Μέγεθος σύγκρισης/αναφοράς γίνεται με βάση τον
→ **Αριθμό Βασικών Πράξεων**

Βασικές Πράξεις → Ανάθεση τιμής (εκχώρηση)

→ Σύγκριση μεταξύ δύο μεταβλητών

→ Οποιαδήποτε αριθμητική πράξη μεταξύ δύο μεταβλητών

Έχω **Χειρότερη Περίπτωση** όταν δώσω ως είσοδο **εκείνες τις τιμές που οδηγούν στην εκτέλεση μέγιστου αριθμού πράξεων**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω ότι δίνεται ο επόμενος απλός αλγόριθμος:

```
Αλγόριθμος Παράδειγμα1
n ← 10
Αρχή_επανάληψης
  Διάβασε m
  n ← n - 1
Μέχρις_ότου (m=0) ή (n=0)
Εκτύπωσε m
Τέλος Παράδειγμα1
```

Ποια είναι η Χειρότερη Περίπτωση για τον παραπάνω Αλγόριθμο;

5.1.2 Μέγεθος Εισόδου Αλγορίθμου

Τα δεδομένα (μεταβλητή, -ες) συνιστούν το μέγεθος εισόδου ενός αλγορίθμου.

Πιν. 5.1. Μέγεθος εισόδου και βασική πράξη αλγορίθμων

Αλγόριθμος	Μέγεθος εισόδου αλγορίθμου (n)	Βασική Πράξη
ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ	το πλήθος των αντικειμένων που θα ταξινομηθούν	σύγκριση
ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ	το πλήθος των ψηφίων των αριθμών που θα πολλαπλασιασθούν	αριθμητικές πράξεις
ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ	το πλήθος των στοιχείων του πίνακα	σύγκριση

5.1.3 Χρόνος εκτέλεσης προγράμματος Αλγορίθμου

Αλγόριθμος Παράδειγμα2

$x \leftarrow 123$

$y \leftarrow 234$

Για i **από** 0 **μέχρι** 4

Εκτύπωσε i

$z \leftarrow x * y$

Τέλος_επανάληψης

Εκτύπωσε x

Εκτύπωσε y

Εκτύπωσε z

Τέλος Παράδειγμα2

$n=5$ (5 επαναλήψεις)

Υπολόγισε τον συνολικό αριθμό πράξεων του παραπάνω Αλγορίθμου.

Εντολή αλγορίθμου	Αριθμός πράξεων
ανάθεση τιμών στα x και y	
Βρόχος επανάληψης αρχική τιμή i έλεγχος i αύξηση i εκτύπωση i υπολογισμός z (2Χ5)	
Εκτύπωση x, y, z	
ΣΥΝΟΛΟ	

Πιν. 5.2. Χρόνοι εκτέλεσης αλγορίθμου ανάλογα με το μέγεθος

μέγεθος n	Χρόνος εκτέλεσης
5	32 μικρο-δευτερόλεπτα
10	57 μικρο-δευτερόλεπτα
100	507 μικρο-δευτερόλεπτα
1.000.000	5 δευτερόλεπτα (περίπου)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω πρόγραμμα υλοποίησης ενός αλγορίθμου:

```

Αλγόριθμος Ελεγχος_εκτέλεσης
a ← 1
b ← 2
Για i από 1 μέχρι 100
    a ← i
    b ← a * i
Τέλος_επανάληψης
Εκτύπωσε a
Εκτύπωσε b
Τέλος Ελεγχος_εκτέλεσης
    
```

Να υπολογισθεί η επίδοσή του με βάση τον αριθμό των πράξεων που θα εκτελεσθούν.

Εντολή αλγορίθμου	Αριθμός πράξεων
ανάθεση τιμών στα a και b	2
Βρόχος επανάληψης	
αρχική τιμή i	1
έλεγχος i	101
αύξηση i	100
ανάθεση τιμών στο a	100
ανάθεση τιμών στο b (2x100)	200
Εκτύπωση a,b	2
ΣΥΝΟΛΟ	506

Με δεδομένο ότι ο βρόχος του προγράμματος θα εκτελεσθεί 100 φορές προκύπτει η παραπάνω ανάλυση, η οποία αποτελεί εκτίμηση και του χρόνου εκτέλεσης του προγράμματος αλγορίθμου. Είναι χρήσιμο εδώ να καταγραφεί το μέγεθος του προβλήματος και να εκφρασθεί το σύνολο των κριτηρίων επίδοσης σε σχέση με αυτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Έστω ότι έχουμε τον παρακάτω αλγόριθμο ανάγνωσης και άμεσης εκτύπωσης των στοιχείων ενός διδιάστατου πίνακα A:

```

Αλγόριθμος Ανάγνωση_Εκτύπωση_Πίνακα
Δεδομένα // n //
Για i από 1 μέχρι n
    Για j από 1 μέχρι n
        Διάβασε A[i, j]
        Εκτύπωσε A[i, j]
    Τέλος_επανάληψης
Τέλος_επανάληψης
Τέλος Ανάγνωση_Εκτύπωση_Πίνακα
    
```

Να υπολογισθεί ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου αυτού και να σχολιασθεί η βαρύτητα των πράξεων επανάληψης σε σχέση με την απόφαση για την πολυπλοκότητα των αλγορίθμων.

Από ό,τι παρατηρούμε υπάρχουν δύο βρόχοι επανάληψης (ένας βρόχος για κάθε διάσταση του πίνακα). Για κάθε στιγμή επανάληψης μέσα στο εσωτερικό των δύο βρόχων γίνονται δύο απλές πράξεις (ανάγνωση και εκτύπωση) μοναδιαίου κόστους η καθεμία. Επομένως η πολυπλοκότητα του παραπάνω αλγορίθμου θα εκφράζεται με $n * n * 2$, δηλαδή ο αλγόριθμος είναι τετραγωνικός. Είναι φανερό ότι οι βρόχοι επανάληψης είναι εκείνοι που καθορίζουν την επιβάρυνση στο κόστος εκτέλεσης του αλγορίθμου.

ΔΣ2. Έστω ότι έχουμε τον παρακάτω αλγόριθμο:

```
Αλγόριθμος Ελεγχος_επίδοσης
x ← 10
c ← 20
Για i από 100 μέχρι 10 με_βήμα -10
    x ← i
    y ← 2*x + i
Τέλος_επανάληψης
Εκτύπωσε x
Εκτύπωσε y
Τέλος Ελεγχος_επίδοσης
```

Να υπολογισθεί η επίδοσή του με βάση τον αριθμό των πράξεων που θα εκτελεσθούν.

5.1.4 Αποδοτικότητα Αλγορίθμου

Εάν δύο Αλγόριθμοι κάνουν την ίδια εργασία πως επιλέγουμε τον καταλληλότερο;

- Χρόνος;
- Χρήση μνήμης;

Ο Χρόνος εκτέλεσης εξαρτάται:

- ✓ Τύπος υπολογιστή
- ✓ Γλώσσα προγραμματισμού
- ✓ Δομή προγράμματος / Δομές δεδομένων
- ✓ Χρόνος πρόσβασης στο δίσκο (Είσοδος/Εξόδος Δεδομένων)
- ✓ Είδος συστήματος (Ενός / πολλών χρηστών)

Προϋποθέσεις Σύγκρισης

1. Στην ίδια γλώσσα
2. Ο ίδιος μεταφραστής της γλώσσας
3. Ίδια Υπολογιστική Πλατφόρμα (Υπολογιστής)
4. Ίδια δεδομένα ως είσοδο

Άσκηση: Συγκρίνετε ως προς την αποδοτικότητα τον αλγόριθμο **σειριακής** και **δυαδικής** αναζήτησης. (Βρείτε το μέσο αριθμό πράξεων που απαιτεί ο αλγόριθμος σειριακής αναζήτησης η στοιχείων και συγκρίνετε με τον παρακάτω πίνακα που δείχνει τον αριθμό των συγκρίσεων στη δυαδική αναζήτηση (χειρότερη περίπτωση), για διάφορα πλήθη στοιχείων.

Στοιχεία N	Συγκρίσεις
10	4
100	7
1.000	10
10.000	14
100.000	17
1.000.000	20
10.000.000	24
100.000.000	27
1.000.000.000	30

5.3 Πολυπλοκότητα Αλγορίθμων

Τρόποι μέτρησης επίδοσης Αλγορίθμου
(Υπολογισμός Χρόνου επεξεργασίας & Χωρητικότητας μνήμης)

Εμπειρικός (εκ των *υστέρων* - a posteriori)
Μειονεκτήματα:

1. Δυσκολία πρόβλεψης συμπεριφοράς αλγορίθμου για άλλα δεδομένα
2. Χρόνος επεξεργασίας εξαρτάται από: υλικό, γλώσσα πρ, μεταφραστή & τον ίδιο τον προγραμματιστή

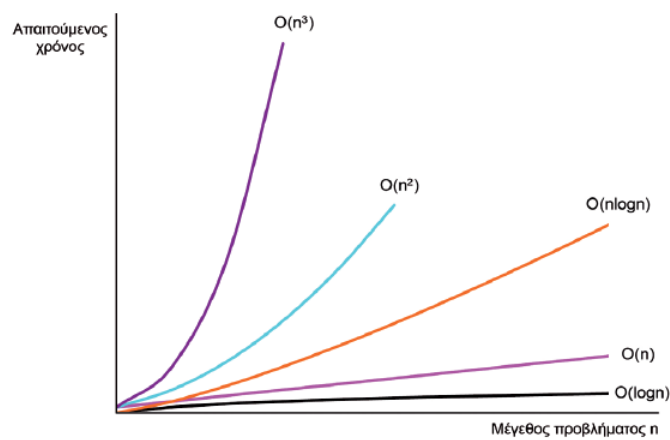
Θεωρητικός (εκ των *προτέρων* - a priori)
Εισάγεται μία μεταβλητή n που εκφράζει το μέγεθος του προβλήματος
(πχ για Ταξινόμηση k στοιχείων $n=k$)
Ο Χρόνος επεξεργασίας & ο Απαιτούμενος χώρος μνήμης εκτιμώνται με τη βοήθεια μιας συνάρτησης $f(n)$
Η **Τάξη (πολυπλοκότητα)** του Αλγορίθμου εκφράζεται με το **O**

Η **πολυπλοκότητα** ενός αλγορίθμου δίνει ένα μέτρο της χρονικής καθυστέρησης του αλγορίθμου για την επίλυση ενός προβλήματος.

Κατηγορίες Πολυπλοκότητας Αλγορίθμων		
Πολυπλοκότητα	Ονομασία	Παρατηρήσεις
$O(1)$	Σταθερή	Κάθε εντολή του προγράμματος εκτελείται μία φορά ή το πολύ μερικές μόνο φορές. Στην περίπτωση αυτή λέγεται ότι ο αλγόριθμος είναι σταθερής πολυπλοκότητας.
$O(\log n)$	Λογαριθμική	Ο αλγόριθμος είναι λογαριθμικής πολυπλοκότητας. Ας σημειωθεί ότι με "log" θα συμβολίζεται ο δυαδικός λογάριθμος, ενώ με "ln" θα συμβολίζεται ο φυσικός λογάριθμος. Συνήθως, οι λογάριθμοι που χρησιμοποιούνται στο βιβλίο αυτό είναι δυαδικοί.
$O(n)$	Γραμμική	Αυτή είναι η καλύτερη επίδοση για έναν αλγόριθμο που πρέπει να εξετάσει ή να δώσει στην έξοδο n στοιχεία.
$O(n \log n)$		Διαβάζεται όπως ακριβώς γράφεται ($n \log n$), δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιείται κάποιο επίθετο (όπως για παράδειγμα γραμμολογαριθμική). Στην κατηγορία αυτή ανήκει μία πολύ σπουδαία οικογένεια αλγορίθμων ταξινόμησης
$O(n^2)$	Τετραγωνική	Πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο για προβλήματα μικρού μεγέθους.
$O(n^3)$	Κυβική	Και αυτοί οι αλγόριθμοι πρέπει να χρησιμοποιούνται μόνο για προβλήματα μικρού μεγέθους
$O(2^n)$	Εκθετική	Σπάνια στην πράξη χρησιμοποιούνται αλγόριθμοι εκθετικής πολυπλοκότητας

Πιν. 5.3. Χρόνοι εκτέλεσης αλγορίθμων ανάλογα με την πολυπλοκότητα και το μέγεθος

Πολυπλοκότητα αλγορίθμου	Μέγεθος προβλήματος		
	n = 20	n = 40	n = 60
$O(n)$	0.00002 δεύτερα	0.00004 δεύτερα	0.00006 δεύτερα
$O(n^2)$	0.0004 δεύτερα	0.0016 δεύτερα	0.0036 δεύτερα
$O(n^3)$	0.008 δεύτερα	0.064 δεύτερα	216 δεύτερα
$O(2^n)$	1.0 δεύτερο	2.7 ημέρες	366 αιώνες
$O(n!)$	771 αιώνες	$3 \cdot 10^{32}$ αιώνες	$3 \cdot 10^{66}$ αιώνες



Εικόνα 2.10: Καμπύλες των κυριότερων συναρτήσεων πολυπλοκότητας.

5.3.1 Ταξινόμηση ευθείας ανταλλαγής

Μέθοδος Φυσαλίδας Εμφωλευμένες επαναλήψεις
(Συγκρίσεις C και μετακινήσεις κελιών M) \rightarrow Πολυπλοκότητα = $O(n^2)$

5.3.2 Γραμμική (Σειριακή) Αναζήτηση

Πολυπλοκότητα επιτυχούς αναζήτησης = $O(n)$
Πολυπλοκότητα ανεπιτυχούς αναζήτησης = $O(n)$

Πιν. 5.4. Πολυπλοκότητες μερικών αλγορίθμων

Αλγόριθμος	Πολυπλοκότητα
Ώθηση-απώθηση σε στοίβα	$O(1)$
Εισαγωγή-εξαγωγή σε ουρά	$O(1)$
Fibonacci επαναληπτική	$O(n)$
Ταξινόμηση ευθείας ανταλλαγής	$O(n^2)$
Σειριακή αναζήτηση	$O(n)$
Διαδική αναζήτηση	$O(\log n)$

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 5 από Τετράδιο Μαθητή

5.4. Τεστ αυτοαξιολόγησης

1. Δίνονται οι παρακάτω ομάδες προτάσεων. Σε καθεμία από αυτές, να κάνετε τις απαραίτητες διορθώσεις ώστε να ισχύουν οι προτάσεις:
 1. Η χειρότερη περίπτωση ενός αλγορίθμου αφορά στο ελάχιστο κόστος εκτέλεσης του αλγορίθμου, κόστος που μετράται σε υπολογιστικούς πόρους.
 2. Τα δεδομένα συνιστούν το μέγεθος της πολυπλοκότητας ενός αλγορίθμου.
 3. Ο απλούστερος τρόπος μέτρησης της επίδοσης ενός αλγορίθμου είναι ο εμπειρικός ή αλλιώς ο λεγόμενος εκ των προτέρων που υλοποιείται και εφαρμόζεται σε ένα σύνολο δεδομένων ώστε να υπολογισθεί ο απαιτούμενος χρόνος επεξεργασίας και η πολυπλοκότητα.
2. Συμπλήρωσε τα κενά με τη σωστή λέξη που λείπει:
 4. Τα δεδομένα συνιστούν το μέγεθος της _____ ενός αλγορίθμου.
 5. Ο συμβολισμός $O(n^2)$ εκφράζει την _____ πολυπλοκότητα.
 6. Ο συμβολισμός $O(\log n)$ εκφράζει τη _____ πολυπλοκότητα.
 7. Ως _____ ορίζονται οι αλγόριθμοι που δε δίνουν την καλύτερη λύση, αλλά προτιμώνται για λόγους ταχύτητας.
3. Χαρακτήρισε τα παρακάτω σαν σωστό ή λάθος:
 8. Αν η πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου είναι $f(n)$, τότε λέγεται ότι ο αλγόριθμος είναι τάξης $O(g(n))$ αν υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι c και n_0 , έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει: $|f(n)| > c |g(n)|$
 9. Ο συμβολισμός $O(n^2)$ εκφράζει την κυβική πολυπλοκότητα και πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο για προβλήματα μεγάλου μεγέθους.
 10. Ο συμβολισμός $O(n)$ εκφράζει τη γραμμική πολυπλοκότητα η οποία είναι η καλύτερη επίδοση για έναν αλγόριθμο που πρέπει να εξετάσει ή να δώσει στην έξοδο n στοιχεία.
 11. Ευριστικοί λέγονται οι αλγόριθμοι που δεν είναι τυποποιημένοι και δεν ανήκουν στις γνωστές οικογένειες αλγορίθμων.

4. Διάλεξε όλα όσα χρειάζονται μεταξύ των προτεινόμενων:

12. Μία βασική πράξη μπορεί να είναι:
- A) βρόχος επανάληψης
 - B) ανάθεση τιμής
 - Γ) σύγκριση μεταξύ δύο μεταβλητών
 - Δ) συνθήκη Αν..αλλιώς
 - E) οποιαδήποτε αριθμητική πράξη μεταξύ δύο μεταβλητών
13. Ο χρόνος εκτέλεσης κάθε αλγορίθμου εξαρτάται από ένα σύνολο παραγόντων που περιλαμβάνουν τα εξής:
- A) Τύπος ηλεκτρονικού υπολογιστή που θα εκτελέσει το πρόγραμμα του αλγορίθμου
 - B) Χρονική στιγμή εκτέλεσης του αλγορίθμου
 - Γ) Συνθήκες ανταγωνισμού με άλλους αλγορίθμους
 - Δ) Γλώσσα προγραμματισμού που θα χρησιμοποιηθεί
 - E) Δομή προγράμματος και δομές δεδομένων που χρησιμοποιεί
 - Z) Αριθμός εντολών του αλγορίθμου
 - H) Χρόνος για πρόσβαση στο δίσκο και στις ενέργειες εισόδου-εξόδου
 - Θ) Είδος συστήματος, ενός χρήστη ή πολλαπλών χρηστών