Γυμνάσιο Σορωνής
Ημερομηνία: _______________
Τμήμα: ____________
Ονοματεπώνυμο :_____________________________

Μάθημα: Άλγεβρα Α Γυμνασίου
Ασκήσεις (με θεωρία) για το σπίτι

Κεφάλαιο 1. ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 7ο : 1.5 Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) – Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)

Θεωρία: Κοινά πολλαπλάσια – Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)

--Δύο οι περισσότεροι φυσικοί αριθμοί έχουν άπειρα κοινά πολλαπλάσια. **Το μικρότερο** από αυτά τα πολλαπλάσια που δεν είναι μηδέν (0) , είναι το **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των αριθμών αυτών.

Π.χ. Αν ξεκινήσουμε να γράφουμε τα πολλαπλάσια για τους αριθμούς 4 και 6, θα έχουμε:

Πολλαπλάσια του αριθμού 4:	**0**	4	8	***12***	16	20	***24***	28	32	***36***	40 ...
Πολλαπλάσια του αριθμού 6:	**0**	6	***12***	18	***24***	30	***36***	42	48	54	60 ...

Παρατηρούμε ότι εκτός από το 0, τα κοινά πολλαπλάσια από τα παραπάνω πολλαπλάσια που γράψαμε για τους αριθμούς 4 και 6, είναι οι αριθμοί: 12, 24, 36, ...

Ο μικρότερος από τους αριθμούς αυτούς(εκτός το 0) είναι ο αριθμός 12. Έτσι λοιπόν ο αριθμός 12 είναι το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των αριθμών 4 και 6 και γράφεται ως εξής:

ΕΚΠ(4, 6) = 12

--**Εύρεση ΕΚΠ** με τη βοήθεια της **ανάλυσης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**.

Για να βρούμε το **ΕΚΠ δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών**, πρώτα τους αναλύουμε σε **γινόμενα πρώτων παραγόντων**. Στη συνέχεια από τα γινόμενα που βρήκαμε παίρνουμε το **γινόμενο από τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με τον μεγαλύτερο εκθέτη**.

Π.χ. Για να βρούμε το ΕΚΠ των αριθμών 2.520, 2.940 και 3.780, τους αναλύουμε πρώτα σε γινόμενα πρώτων παραγόντων:

2520	2	διαιρώ με το 2
1260	2	»
630	2	»
315	3	διαιρώ με το 3
105	3	»
35	5	διαιρώ με το 5
7	7	διαιρώ με το 7
1		

2940	2	διαιρώ με το 2
1470	2	»
735	3	διαιρώ με το 3
245	5	διαιρώ με το 5
49	7	διαιρώ με το 7
7	7	»
1		

3780	2	διαιρώ με το 2
1890	2	»
945	3	διαιρώ με το 3
315	3	»
105	3	»
35	5	διαιρώ με το 5
7	7	διαιρώ με το 7
1		

$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ $\quad$ $2940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ $\quad$ $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

Στη συνέχεια παίρνω τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με τον μεγαλύτερο εκθέτη:
2^3 (από τον αριθμό 2.520), 3^3 (από τον αριθμό 3.780), 5 (κοινός και στους τρεις αριθμούς) και 7^2 (από τον αριθμό 2.940).

Τέλος βρίσκω το γινόμενό τους: $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 8 \cdot 27 \cdot 5 \cdot 49 = 52.920$

Έτσι γράφω: **ΕΚΠ(2.520, 2.940, 3.780) = 52.920**

Σημείωση: Με την εύρεση ΕΚΠ λύνονται προβλήματα που περιέχουν ερωτήματα όπως: **“πότε θα ξανασυναντυθούν ...”, “πότε θα ξαναβγάλουν ...”, “σε πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν ...”, “μετά από πόσες ώρες θα ξαναπάνε ...”, “πόσο συχνά τρώνε μαζί ...”.**
Επίσης λύνονται προβλήματα που περιέχουν φράσεις όπως: **“...να βρείτε τον ακριβή αριθμό των ..., αν ξέρετε ότι είναι μεγαλύτερος από ... και μικρότερος από ...”**
Π.χ Πρέπει να ποτίζω τον κάκτο μου κάθε 9 ημέρες, να του βάζω λίπασμα κάθε 24 ημέρες και να τον σκαλίζω κάθε 60 ημέρες. Σήμερα πότισα, σκάλισα και έβαλα λίπασμα στον κάκτο μου. **Μετά από πόσες ημέρες** θα πρέπει να κάνω και τις τρεις αυτές εργασίες την ίδια ημέρα;
Π.χ Ένας πειρατής μετράει τα χρυσά νομίσματα που έχει. Αν τα χωρίσει σε στοίβες των 10 ή των 12 ή των 15 νομισμάτων τότε δεν περισσεύει κανένα. Αν ξέρουμε ότι έχει περισσότερα από 400 και λιγότερα από 450 νομίσματα, να βρείτε τον ακριβή αριθμό των νομισμάτων.

Άσκηση 1: Να βρείτε το ΕΚΠ με δύο τρόπους (πολλαπλάσια και ανάλυση σε γινόμενα πρώτων παραγόντων), των αριθμών: α) 20, 30, 50. β) 48, 60, 84. γ) 36, 54, 72.
Άσκηση 2: Από το βιβλίο μαθητή, σελίδα 30, τα προβλήματα 4 και 5.

Θεωρία: Κοινοί διαιρέτες – Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)

--Αν έχουμε δύο ή περισσότερους φυσικούς αριθμούς, τότε υπάρχουν ορισμένοι φυσικοί αριθμοί που **τους διαιρούν ταυτόχρονα.** Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **κοινοί διαιρέτες τους**. Από όλους τους κοινούς διαιρέτες **ο μεγαλύτερος λέγεται Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)**.

--Αν ο ΜΚΔ δύο αριθμών α, β είναι το 1, δηλαδή: **ΜΚΔ(α, β) = 1**, τότε οι αριθμοί **α και β λέγονται πρώτοι μεταξύ τους**. Καθένας από τους αριθμούς α και β δεν είναι υποχρεωτικά πρώτος.

Π.χ. Οι διαιρέτες των αριθμών 12, 18 και 36 είναι:

Διαιρέτες του 12:	***1***	***2***	***3***	4	***6***	12			
Διαιρέτες του 18:	***1***	***2***	***3***	***6***	9	18			
Διαιρέτες του 36:	***1***	***2***	***3***	4	***6***	9	12	18	36

Παρατηρούμε ότι οι κοινοί διαιρέτες των αριθμών 12, 18, 36 είναι οι: 1, 2, 3 και 6. Ο μεγαλύτερος τους είναι ο 6. Αυτός είναι λοιπόν ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των αριθμών 12, 18, 36 και γράφουμε: **ΜΚΔ(12, 18, 36) = 6**.

Π.χ. Οι διαιρέτες των αριθμών 24 και 35 είναι:

Διαιρέτες του 24:	***1***	2	3	4	6	8	12	24
Διαιρέτες του 35:	***1***	5	7	35				

Παρατηρούμε ότι ο μόνος κοινός διαιρέτης των αριθμών 24 και 35 είναι ο αριθμός 1.
Έτσι **ΜΚΔ(24, 35) = 1**, οπότε λέμε ότι οι αριθμοί 24 και 35 είναι **πρώτοι μεταξύ τους**.

--**Εύρεση ΜΚΔ** δύο ή περισσότερων αριθμών με τη βοήθεια της **ανάλυσης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**.
Για να βρούμε τον ΜΚΔ **δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών**, πρώτα τους αναλύουμε σε **γινόμενα πρώτων παραγόντων**. Στη συνέχεια από τα γινόμενα που βρήκαμε παίρνουμε το **γινόμενο από τους κοινούς παράγοντες με τον μικρότερο εκθέτη**.

Π.χ. Για να βρούμε τον ΜΚΔ των αριθμών 2.520, 2.940 και 3.780, τους αναλύουμε πρώτα σε γινόμενα πρώτων παραγόντων:

2520	2	διαιρώ με το 2
1260	2	»
630	2	»
315	3	διαιρώ με το 3
105	3	»
35	5	διαιρώ με το 5
7	7	διαιρώ με το 7
1		

2940	2	διαιρώ με το 2
1470	2	»
735	3	διαιρώ με το 3
245	5	διαιρώ με το 5
49	7	διαιρώ με το 7
7	7	»
1		

3780	2	διαιρώ με το 2
1890	2	»
945	3	διαιρώ με το 3
315	3	»
105	3	»
35	5	διαιρώ με το 5
7	7	διαιρώ με το 7
1		

$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ $\quad 2940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ $\quad 3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

Στη συνέχεια παίρνω τους κοινούς παράγοντες με τον μικρότερο εκθέτη:
2^2 (από τον αριθμό 3.780 ή τον αριθμό 2.940), 3 (από τον αριθμό 2.940), 5 (κοινός και στους τρεις αριθμούς) και 7 (από τον αριθμό 3.780).
Τέλος βρίσκω το γινόμενό τους: $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$
Έτσι γράφω: **ΜΚΔ(2.520, 2.940, 3.780) = 420.**

Σημείωση: Με την εύρεση του ΜΚΔ λύνονται προβλήματα που περιέχουν ερωτήματα όπως: **"πόσα το πολύ όμοια πακέτα ... μπορούν να γίνουν", "σε πόσες το πολύ ομάδες με τον ίδιο αριθμό ατόμων μπορούν να χωριστούν ...".**
Γενικά, όταν ένα πρόβλημα μας ζητάει να μοιράσουμε ένα σύνολο από **διαφορετικά** μεταξύ τους **πράγματα** σε μικρότερες **ισοδύναμες ομάδες** ώστε να μην περισσεύει τίποτα, τότε βρίσκουμε τους **Κοινούς Διαιρέτες** των πραγμάτων (αριθμών) αυτών.
Π.χ.: *Έχω συνολικά 24 γόμες, 32 μολύβια και 8 ξύστρες και θέλουμε να τα μοιράσουμε σε ισοδύναμες μικρότερες ομάδες.* ***Με πόσους τρόπους*** *μπορούμε να τα μοιράσουμε;*
Όταν ένα πρόβλημα μας ζητάει να μοιράσουμε ένα σύνολο από διαφορετικά μεταξύ τους πράγματα **σε όσο το δυνατόν περισσότερες ισοδύναμες ομάδες** ώστε να μην περισσεύει τίποτα, τότε βρίσκουμε το **Μ.Κ.Δ.** των πραγμάτων (αριθμών) αυτών.
Π.χ.: *Έχω συνολικά 24 γόμες, 32 μολύβια και 8 ξύστρες και θέλουμε να τα μοιράσουμε σε ισοδύναμες μικρότερες ομάδες.* ***Σε πόσες περισσότερες ομάδες*** *(ή πόσες το πολύ ομάδες) μπορούμε να τα μοιράσουμε;*

Άσκηση 3: Από το βιβλίο του μαθητή σελίδα 30, την άσκηση 7.
Άσκηση 4: Ένας ανθοπώλης φτιάχνει ανθοδέσμες από κόκκινα λευκά και κίτρινα τριαντάφυλλα. Αν έχει 192 κόκκινα, 120 λευκά και 72 κίτρινα, να βρείτε το μέγιστο πλήθος των ομοιόμορφων ανθοδεσμών που μπορεί να φτιάξει και πόσα λουλούδια από το κάθε είδος θα έχει κάθε ανθοδέσμη.

Καθηγητής Παναγιώτης Πέντσας ΠΕ20