Περιοδικό Ευκλείδης Β
Αρ. Τεύχους Τεύχος 1
Περίοδος Οκτώβρης 1987
Συγγραφέας Γ. Κεραμίδας
Αρ. Άρθρου 14
Σελίδες 56-59
Γλώσσα Ελληνική

Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού

Γ. Κεραμιδας

1. Με σκοπό την απόδειξη του θεωρήματος που ορίζει το ακέραιο μέρος πραγματικού, δίνουμε δυο θεωρήματα (χωρίς απόδειξη) που θα χρειαστούν:

Θεώρημα 1. (Αρχή της καλής διάταξης). Κάθε μη κενό υποσύνολο του συνόλου των φυσικών $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

Θεώρημα 2: (Θεώρημα Αρχιμήδη — Εύδοξου). Αν x, y, είναι πραγματικοί αριθμοί με $x > 0$, τότε υπάρχει φυσικός n έτσι ώστε $n \cdot x > y$. Για $x = 1$, έχω: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \; n > y$.

2. Θεώρημα του ακεραίου μέρους

Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει ακέραιος ρ έτσι ώστε να ισχύει $\rho \leq x < \rho + 1$. Μάλιστα ο ακέραιος αυτός είναι μοναδικός.

Απόδειξη:

Αποδεικνύουμε πρώτα την ύπαρξη ενός (τουλάχιστον) τέτοιου ακεραίου. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για τον $x \in \mathbb{R}$:

i) Αν $x = 0$ τότε το θεώρημα ισχύει αρκεί να πάρουμε $\rho = 0$, δηλαδή $0 \leq 0 < 0 + 1$.

ii) Έστω $x > 0$. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα 2 $\exists n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $n > x$.

Θεωρώ το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} : n > x\}$. Προφανώς $A \subseteq \mathbb{Z}_+$ και λόγω του θεωρήματος του Αρχιμήδη $A \neq \varnothing$. Άρα από θεώρημα 1 (αρχή της καλής διάταξης) υπάρχει n_0 με $n_0 = \min A$ και $n_0 > x$. (1)

Θα δείξουμε τώρα ότι $x \geqslant n_0 - 1$. Πράγματι, αν είχαμε $x < n_0 - 1 \Leftrightarrow n_0 - 1 > x$ τότε αφού $n_0 - 1 > x \Leftrightarrow n_0 - 1 \in A$. Όμως το n_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του A άρα

$$n_0 \leq n_0 - 1 \Leftrightarrow 0 \leq -1, \quad \text{άτοπο.}$$

Αναγκαστικά λοιπόν $x \geqslant n_0 - 1$ (2)

Από (1), (2) έχω: $n_0 - 1 \leq x < n_0$. Έτσι αν θέσω $\rho = n_0 - 1$ παίρνω: $\rho \leq x < \rho + 1$.

iii) Έστω $x < 0$. Τότε $-x > 0$ και σύμφωνα με το (ii) υπάρχει $n_1 \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε:

$$n_1 \leq -x < n_1 + 1 \Leftrightarrow -n_1 \geqslant x > -n_1 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -n_1 - 1 < x \leq n_1$$

Αν $x = -n_1$ τότε παίρνω $\rho = -n_1 - 1$ οπότε $\rho = x < \rho + 1$ ή $\rho \leq x < \rho + 1$.

Αν $x < -n_1$ τότε παίρνω $\rho = -n_1 - 1$ οπότε $\rho < x < \rho + 1$ ή $\rho \leq x < \rho + 1$.

Άρα σε κάθε περίπτωση το θεώρημα αληθεύει. Αποδεικνύουμε τώρα την μοναδικότητα του ακεραίου ρ.

Έστω ότι υπάρχουν δύο ακέραιοι $\rho, \lambda \in \mathbb{Z}$ με

$$\rho \leq x < \rho + 1 \quad \text{και} \quad \lambda \leq x < \lambda + 1$$

για κάποιο $x \in \mathbb{R}$.

Τότε $\rho < \lambda$ ή $\rho > \lambda$ ή $\rho = \lambda$.

i) Αν $\rho < \lambda$ τότε έχουμε:

$$\rho < \lambda \leq x < \rho + 1 \Rightarrow \rho < \lambda < \rho + 1, \quad \text{άτοπο.}$$

ii) Αν $\rho > \lambda$ πάλι καταλήγουμε σε άτοπο με ανάλογη απόδειξη.

Αναγκαστικά λοιπόν $\rho = \lambda$ οπότε δείχτηκε η μοναδικότητα του ρ.

Το θεώρημα αποδείχθη πλήρως.

Ορισμός: Τον ακέραιο ρ του προηγούμενου θεωρήματος τον συμβολίζουμε με $[x] = \rho$ και ονομάζεται ακέραιο μέρος του x.

Σχόλιο: Το προηγούμενο θεώρημα μας λέει ότι κάθε πραγματικός αριθμός περιέχεται μεταξύ δύο διαδοχικών ακεραίων. Παρατηρούμε επίσης ότι ο $[x] = \rho$ είναι ο μεγαλύτερος από τους ακέραιους που δεν υπερβαίνουν τον x. Συχνά αυτή η τελευταία πρόταση δίνεται και σαν ορισμός του ακεραίου μέρους.

Παραδείγματα:

$$[4,7]=4,\ [8,97]=8,\ [0{,}56]=0,\quad \left[\frac{7}{2}\right]=3,$$

$$[12]=12,\quad [-3,1]=-4,\quad [-0{,}8]=-1$$

Πρόταση 1: Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

i) $x-1<[x]\le x<[x]+1$

ii) $x=[x]+\theta$, όπου $0\le\theta<1$.

Απόδειξη:

i) Από το θεώρημα του ακεραίου μέρους έχουμε

$$[x]\le x<[x]+1.$$

Αν αφαιρέσω από τα δύο μέλη της δεύτερης ανισότητας το 1 παίρνω: $x-1<[x]$. Άρα τελικά έχω την τριπλή ανισότητα

$$x-1<[x]\le x<[x]+1.$$

ii) Έχω $[x]\le x<[x]+1 \Rightarrow 0\le x-[x]<1$. Αν θέσω $x-[x]=\theta \Rightarrow x=[x]+\theta$, όπου $0\le\theta<1$.

Πρόταση 2: Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

1) $[x+\lambda]=[x]+\lambda$, όπου $x\in\mathbb{R},\ \lambda\in\mathbb{Z}$.

2) $[x]+[-x]=\begin{cases}0, & \text{αν } x\in\mathbb{Z}\\ -1, & \text{αν } x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

3) $[\alpha]+[\beta]\le[\alpha+\beta]\le[\alpha]+[\beta]+1$

4) $[\alpha_1]+[\alpha_2]+\dots+[\alpha_\nu]\le[\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu]\le$

$$[\alpha_1]+[\alpha_2]+\dots+[\alpha_\nu]+(\nu-1)$$

με $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ (Γενίκευση της (3)).

Απόδειξη:

1) Έχουμε $[x]\le x<[x]+1\Rightarrow$

$[x]+\lambda\le x+\lambda<[x]+\lambda+1$ και $[x]+\lambda\in\mathbb{Z}$.

Άρα $[x+\lambda]=[x]+\lambda$.

2) (i) Αν $x\in\mathbb{Z}$ τότε και $-x\in\mathbb{Z}$, οπότε $[x]=x$ και $[-x]=-x$.
Άρα $[x]+[-x]=x+(-x)=0$.

(ii) Αν $x\notin\mathbb{Z}$ τότε $x=[x]+\theta$, όπου $0<\theta<1$. Τότε

$$-x=-[x]+(-\theta)\Rightarrow[-x]=[-[x]+(-\theta)]\xRightarrow{-[x]\in\mathbb{Z}}$$

$$\xRightarrow{-[x]\in\mathbb{Z}}[-x]=-[x]+[-\theta]\Rightarrow[x]+[-x]=[-\theta].\ (*)$$

Όμως $0<\theta<1\Rightarrow-1<-\theta<0\Rightarrow[-\theta]=-1$.

Άρα η (*) γίνεται: $[x]+[-x]=-1$.

3) Έχουμε $\alpha=[\alpha]+\theta_1,\ 0\le\theta_1<1$
$\beta=[\beta]+\theta_2,\ 0\le\theta_2<1$

Προσθέτω αυτές κατά μέλη:

$\alpha+\beta=[\alpha]+[\beta]+(\theta_1+\theta_2)$, όπου $0\le\theta_1+\theta_2<2$.

Τότε $[\alpha+\beta]=[[\alpha]+[\beta]+(\theta_1+\theta_2)]\Rightarrow$

$$\Rightarrow[\alpha+\beta]=[\alpha]+[\beta]+[\theta_1+\theta_2]\ (**),$$

διότι $[\alpha]+[\beta]\in\mathbb{Z}$.

Αφού $0\le\theta_1+\theta_2<2\Rightarrow[\theta_1+\theta_2]=0$ ή 1.

Αν $[\theta_1+\theta_2]=0$ η (**) γίνεται:

$$[\alpha]+[\beta]=[\alpha+\beta]<[\alpha]+[\beta]+1$$

Αν $[\theta_1+\theta_2]=1$ η (**) γίνεται:

$$[\alpha]+[\beta]<[\alpha+\beta]=[\alpha]+[\beta]+1$$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε:

$$[\alpha]+[\beta]\le[\alpha+\beta]\le[\alpha]+[\beta]+1.$$

Παρατήρηση: Από την απόδειξη προκύπτει ότι:

$$[\alpha+\beta]=\begin{cases}[\alpha]+[\beta]\\ \text{ή}\\ [\alpha]+[\beta]+1.\end{cases}$$

Ομοίως αποδεικνύεται επαγωγικά η (4).

3. Εφαρμογές του ακεραίου μέρους σε ασκήσεις

Άσκηση 1η: Να λυθούν στον $\mathbb{R}$ οι εξισώσεις:

(i) $[x+4]=8,\ x\in\mathbb{R}$

(ii) $[x+3{,}5]+\left[\frac{x}{2}\right]=6,\ x\in\mathbb{R}$

Απόδειξη:

i) Έχω

$$[x+4]=8\Leftrightarrow[x]+4=8\Leftrightarrow[x]=4\Leftrightarrow4\le x<5$$

ii) Έχουμε

$$\frac{x}{2}=\left[\frac{x}{2}\right]+\theta,\quad 0\le\theta<1\Rightarrow x=2\left[\frac{x}{2}\right]+2\theta$$

Όταν δηλαδή η εξίσωση είναι πολύπλοκη αντικαθιστώ όλα τα ακέραια μέρη που εμφανίζονται με ένα μόνο ακέραιο μέρος.

Τότε η εξίσωση

$$\Leftrightarrow\left[2\left[\frac{x}{2}\right]+2\theta+3{,}5\right]+\left[\frac{x}{2}\right]=6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[2\left[\frac{x}{2}\right]+3+2\theta+0{,}5\right]+\left[\frac{x}{2}\right]=6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow2\left[\frac{x}{2}\right]+3+[2\theta+0{,}5]+\left[\frac{x}{2}\right]=6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow3\left[\frac{x}{2}\right]=3-[2\theta+0{,}5]\Leftrightarrow\left[\frac{x}{2}\right]=\frac{3-[2\theta+0{,}5]}{3}\in\mathbb{Z},$$

διότι $\left[\frac{x}{2}\right]\in\mathbb{Z}$.

Άρα θα πρέπει το 3 να διαιρεί τον $3-[2\theta+0{,}5]$.

Αφού

$$0\le\theta\le1\Leftrightarrow0\le2\theta<2\Leftrightarrow0{,}5\le2\theta+0{,}5<0{,}5<2{,}5$$

τότε $[2\theta+0{,}5]=0$ ή 1 ή 2.

Το 3 διαιρεί τον $3-[2\theta+0{,}5]$ άρα αναγκαστικά

$$[2\theta + 0{,}5] = 0 \Leftrightarrow 0 \leq 2\theta + 0{,}5 < 1 \Leftrightarrow -0{,}5 \leq 2\theta < 0{,}5$$

$$\overset{\theta \geq 0}{\Longleftrightarrow} 0 \leq \theta < \frac{0{,}5}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \theta < 0{,}25$$

Αφού $[2\theta + 0{,}5] = 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 1$ άρα

$$1 \leq \left[\frac{x}{2}\right] + \theta < 1{,}25 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 1{,}25 \Leftrightarrow 2 \leq x < 2{,}50$$

΄Ασκηση 3η: Να αποδειχτούν οι παρακάτω σχέσεις:

i) $[x] + [y] + [x - y] \leq [2x] \quad x, y \in \mathbb{R}$

ii) $[x + y] - [x - y] \geq [2y] \quad x, y \in \mathbb{R}$.

iii) $[x] + [y] + [x + y] \leq [2x] + [2y] \quad x, \in \mathbb{R}$

iv) Αν $x - [x] < \frac{1}{2}$ να δειχτεί ότι

$$[2x] = 2[x],\ x \in \mathbb{R}$$

v) Αν $x - [x] \geq \frac{1}{2}$ να δειχθεί ότι

$$[2x] = 2[x] + 1,\ x \in x\ \mathbb{R}$$

Γενίκευση των (iv) και (v)

$$x - [x] < \frac{1}{\nu} \Rightarrow [\nu x] = \nu[x] \qquad \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$x - [x] \geqslant \frac{\nu - 1}{\nu} \Rightarrow [\nu x] = \nu[x] + 1 \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

Απόδειξη:

i) ΄Εχω $2x = x + y + (x - y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow [2x] = [x + y + (x - y)] \geqslant [x] + [y] + [x - y]$$

ii) ΄Εχω $2y = (x + y) - (x - y) \Rightarrow$

$$[2y] = [(x + y) - (x - y)] \leq [x + y] - [x - y]$$

iii) ΄Εστω $x = [x] + \theta_1,\ \ 0 \leq \theta_1 < 1$. Τότε

$$x + y = [x] + [y] + (\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = [y] + \theta_2 \quad 0 \leq \theta_2 < 1 \quad \text{με} \quad 0 \leq \theta_1 + \theta_2 < 2.$$

Επίσης

$$2x = 2[x] + 2\theta_1 \Rightarrow [2x] = [2\overset{*}{[x]} + 2\theta_1] = 2[x] + [2\theta_1] \Rightarrow$$

$$2y = 2[y] + 2\theta_2 \Rightarrow [2y] = [2[y] + 2\theta_2] = 2[y] + [2\theta_2]$$

$\xrightarrow{\text{πρόσθεση}} [2x] + [2y] = 2[x] + 2[y] + ([2\theta_1] + [2\theta_1])^{(*)}$, όπου $0 \leq 2\theta_1 < 2$ και $0 \leq 2\theta_2 < 2$. ΄Αρα $[2\theta_1]$ 0 ή 1 και $[2\theta_2] = 0$ ή 1, οπότε

$$[2\theta_1] + [2\theta_1] = 0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2.$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

α) Αν $[2\theta_1] + [2\theta_2] = 0 \Rightarrow [2\theta_1] = [2\theta_2] = 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta_1 < \frac{1}{2}$ από την σχέση

$$x + y = [x] + [y] + (\theta_1 + \theta_2) \Rightarrow 0 \leq \theta_2\ \frac{1}{2}$$

$$[x + y] = [x] + [y] + [\theta_1 + \theta_2] = [x] + [y],$$

διότι $0 \leq \theta_1 + \theta_2 < 1$ άρα $[\theta_1 + \theta_2] = 0$.

Τότε η (*) γίνεται:

$$[2x] + [2y] = 2[x] + 2[y] = [x] + [y] + ([x] + [y]) =$$

$$= [x] + [y] + [x + y]$$

β) Αν $[2\theta_1] + [2\theta_2] = 1$ τότε η (*) γίνεται

$$[2x] + [2y] = [x] + [y] + [x] + [x] + [y] + 1 \geq [x] + [y] + [x + y]$$

γ) Αν $[2\theta_1] + [2\theta_2] = 2$ τότε η (*) γίνεται:

$$[2x] + [2y] = [x] + [y] + [x] + [y] + 2 \geq$$

$$\geq [x] + [y] + [x + y] + 1 > [x] + [y] + [x + y].$$

΄Αρα σε κάθε περίπτωση $[2x] + [2y] \geq [x] + [y] + [x + y]$.

iv) ΄Εχω $x = [x] + \theta,\ 0 \leq \theta < 1 \Rightarrow x - [x] = \theta$ οπότε λόγω της υπόθεσης ισχύει

$$0 \leq \theta < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 2\theta < 1 \ (^{**})$$

Η αποδεικτέα ισότητα γίνεται:

$$[2[x] + 2\theta] = 2[x] \Leftrightarrow 2[x] + [2\theta] = 2[x] \Leftrightarrow [2\theta] = 0$$

πράγμα που ισχύει λόγω (**).

v) ΄Εχω $x = [x] + \theta,\ 0 \leq \theta < 1 \Rightarrow x - [x] = \theta$ οπότε λόγω της υπόθεσης ισχύει

$$\theta \geq \frac{1}{2} \ \text{ δηλαδή } \ \frac{1}{2} \leq \theta < 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2\theta < 2 \ (^{***})$$

Η αποδεικτέα ισότητα γίνεται:

$$[2[x] + 2\theta] = 2[x] + 1 \Leftrightarrow 2[x] + [2\theta] = 2[x] + 1 \Leftrightarrow [2\theta] = 1,$$

ισχύει λόγω (***).

Η γενίκευση των (iv) και (v) γίνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

4. Συναρτήσεις που περιέχουν ακέραιο μέρος

Θα εφαρμόσουμε στην παράγραφο αυτή τη θεωρία του ακεραίου μέρους σε συναρτήσεις των οποίων ο τύπος περιέχει ακέραιο μέρος πραγματικού. Οι ασκήσεις αυτές αναφέρονται στην περιοδικότητα της συνάρτησης, στα όρια, στην συνέχεια και στις παραγώγους. Τέλος θα δώσουμε και μερικές εφαρμογές, στον υπολογισμό ολοκληρώματος (ορισμένου) συνάρτησης με ακέραιο μέρος.

΄Ασκηση 1η: Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x - \nu\left[\frac{x}{\nu}\right],\ \nu \in \mathbb{N}^*$ έχει περίοδο τον φυσικό ν.

Απόδειξη:

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x + \nu) = f(x)$. Πράγματι,

$$f(x + \nu) = x + \nu - \nu\left[\frac{\nu + x}{\nu}\right] = x + \nu - \nu\left[\frac{x}{\nu} + 1\right] =$$

$$= x + \nu - \nu\left(\left[\frac{x}{\nu}\right] + 1\right) = x + \nu - \nu\left[\frac{x}{\nu}\right] - \nu =$$

$$= x - \nu\left[\frac{x}{\nu}\right] = f(x).$$

Άρα η f είναι περιοδική με περίοδο $T = \nu$.

Άσκηση 2η: Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιοδικές:

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = [x]$

ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x - [x]$

Απόδειξη:

i) Θα δείξουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι η f δεν είναι περιοδική. Πράγματι, έστω ότι είναι, με περίοδο $T > 0$ (δεν περιορίζεται η γενικότητα της απόδειξης, διότι αν έχει περίοδο $T < 0$ γνωρίζουμε πως θα έχει περίοδο και τον $-T > 0$).

Αφού $T > 0$ από θεώρημα Αρχιμήδη $\exists\ \nu \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε

$$\nu > \frac{1}{T} \Leftrightarrow \nu \cdot T > 1 \Leftrightarrow x + \nu T > x + 1 \quad (1) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Αφού η f περιοδική με περίοδο T θάχει περίοδο και τον νT, άρα $f(x + \nu T) = f(x) \Leftrightarrow [x + \nu T] = [x]$ (2).

Από την (1) $\Rightarrow [x + \nu T] \geqslant [x + 1] = [x] + 1$ (3).

Από (2), (3) έχω: $[x] \geqslant [x] + 1$, άτοπο (διότι $[x] \leq x < [x] + 1$) άρα η f δεν είναι περιοδική.

ii) Έστω ότι η g είναι περιοδική με περίοδο $T \in \mathbb{R}^*$. Τότε $g(x + T) = g(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x + T - [x + T] = x - [x] \Leftrightarrow T - [x + T] = -[x]$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} T - ([x] + [T]) = -[x] \\ \text{ή} \\ T - ([x] + [T] + 1) = -[x] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} T = [T] & (1) \\ \text{ή} & \\ T = [T] + 1 & (2) \end{array}\right.$$

Η (2) είναι αδύνατη, διότι $T < [T] + 1$.

Η (1) συνεπάγεται ότι ο $T \in \mathbb{Z}^*$ τυχαίος. Άρα η g είναι περιοδική με περίοδο κάθε ακέραιο $\neq 0$.

Άσκηση 3η: Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$$

i) Να δειχθεί ότι η f είναι $1 - 1$ και επί.

ii) Να βρεθεί η αντίστροφη f^{-1}.

iii) Να εξετασθεί ως προς την περιοδικότητα της.

iv) Να εξετασθεί ως προς την μονοτονία της.

Απόδειξη:

i) Για το $\mathscr{D}(f)$ πρέπει: $x - [x] \geqslant 0 \Leftrightarrow [x] \leq x$ που ισχύει $\forall\, x \in \mathbb{R}$ άρα $A = \mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$.

Το 1 – 1

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow [x_1] + \sqrt{x_1 - [x_1]} = [x_2] + \sqrt{x_2 - [x_2]} \quad (1)$$

Αν

$x_1 - [x_1] = \theta_1,\ 0 \leq \theta_1 < 1$ τότε $\sqrt{x_1 - [x_1]} = \sqrt{\theta_1} \in [0, 1)$

$x_2 - [x_2] = \theta_2,\ 0 \leq \theta_2 < 1$ $\quad \sqrt{x_2 - [x_2]} = \sqrt{\theta_2} \in [0, 1)$

Από την (1) $\Rightarrow [[x_1] + \sqrt{x_1 - [x_1]}] = [[x_2] + \sqrt{x_2 - [x_2]}] \Rightarrow$

$$\Rightarrow [x_1] + [\sqrt{x_1 - [x_1]}] = [x_2] + [\sqrt{x_2 - [x_2]}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x_1] + 0 = [x_2] + 0 \Rightarrow [x_1] = [x_2].$$

Άρα η σχέση (1) γίνεται:

$$[x_1] + \sqrt{x_1 - [x_1]} = [x_1] + \sqrt{x_2 - [x_1]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 - [x_1] = x_2 - [x_1] \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η f είναι $1 - 1$.

Το Επί

Θα δείξουμε ότι $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathbb{R}$ ώστε $y = f(x)$. Πράγματι έχω

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = [x] + \sqrt{x - [x]} \Rightarrow [y] = [[x]] + \sqrt{x - [x]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [y] = [x] + [\sqrt{x - [x]}] \Rightarrow [y] = [x]$$

Άρα η σχέση $y = f(x) \Leftrightarrow y = [x] + \sqrt{x - [x]}$ γίνεται:

$$y = [y] + \sqrt{x - [y]} \Leftrightarrow y - [y] = \sqrt{x - [y]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y - [y])^2 = x - [y] \Leftrightarrow x = [y] + (y - [y])^2 \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathbb{R}$ το $x = [y] + (y - [y])^2$ ώστε $y = f(x)$. Άρα η f είναι επί.

ii) Αφού η f είναι $1 - 1$ και επί θα αντιστρέφεται με αντίστροφη $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και τύπο

$$y = [x] + (x - [x])^2 \quad \text{ή} \quad f^{-1}(x) = [x] + (x - [x])^2.$$

iii) Θα δείξω ότι αν μια συνάρτηση f είναι $1 - 1$, τότε δεν είναι περιοδική. Πράγματι, αν ήταν περιοδική τότε θα υπήρχε $T \in \mathbb{R}^*$, $\forall\, x \in \mathscr{D}(f)$, $f(x + T) = f(x) \xrightarrow{\text{ηf } 1-1} x + T = x$ άτοπο, διότι $T \neq 0$.

Αφού λοιπόν δείξαμε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$$

είναι $1 - 1$, δεν θα είναι περιοδική.

iv) Γνωρίζουμε ότι οι αντίστροφες συναρτήσεις έχουν την ίδια μονοτονία. Αρκεί λοιπόν να εξετάσω την f^{-1} ως προς την μονοτονία. (Με συμφέρει καλύτερα να εξετάσω την μονοτονία της f^{-1}, διότι ο τύπος της είναι ευκολώτερος από την f(x), δεν περιέχει ριζικό).

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Θεωρούμε την διαφορά

$$\Delta = f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2) = [x_1] + (x_1 - [x_1])^2 - [x_2] - (x_2 - [x_2])^2 =$$

$$= (x_1 - [x_1])^2 - (x_2 - [x_2])^2 + ([x_1] - [x_2]) \quad (*)$$

Έστω $x_1 = [x_1] + \theta_1,\ 0 \leq \theta_1 < 1 \Rightarrow x_1 - [x_1] = \theta_1$

$x_2 = [x_2] + \theta_2,\ 0 \leq \theta_2 < 1 \quad x_2 - [x_2] = \theta_2$

Αφού υπέθεσα $x_1 < x_2 \Rightarrow [x_1] \leq [x_2]$. Διακρίνω δύο περιπτώσεις:

α) Αν $[x_1] = [x_2]$ τότε $\theta_1 < \theta_2$ οπότε η (*) γίνεται:

$$\Delta = \theta_1^2 - \theta_2^2 < 0 \Rightarrow f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2) \Rightarrow \text{η } f^{-1} \uparrow \ \text{άρα και η } f \uparrow.$$